7/3/16

$f: V \to V$

λ ιδιοτιμή της $f \overset{ορισμός}{\Longleftrightarrow} \exists\ \vec{u} \neq \vec{0}$ ← ιδιοδιάνυσμα
$f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$

$A \in K^{n \times n}$

λ ιδιοτιμή του $A \overset{ορισμός}{\Longleftrightarrow} \exists\ X \in K^{n \times 1},\ X \neq 0$
$AX = \lambda X$

$L_A(X) = AX$

Θεώρημα: Έστω V ένας K-διαν. χώρος και $f: V \to V$ γραμμική απεικόνιση. Το $\lambda \in K$ είναι ιδιοτιμή της f αν και μόνο αν $Ker(f - \lambda I_V) \neq \{\vec{0}\}$

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$ λ ιδιοτιμή της $f \overset{ορισμός}{\Longleftrightarrow} \exists\ \vec{u} \neq \vec{0}$ τέτοιο ώστε
$f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \Rightarrow f(\vec{u}) - \lambda \vec{u} = 0 \Rightarrow f(\vec{u}) - \lambda I_V(\vec{u}) = \vec{0}$
$\Rightarrow (f - \lambda I_V)(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \in Ker(f - \lambda I_V) \Rightarrow \vec{u} \neq \vec{0}$ άρα
$Ker(f - \lambda I_V) \neq \{\vec{0}\}$

$(\Leftarrow)$ $Ker(f - \lambda I_V) \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow$ Άρα υπάρχει $\vec{u} \neq \vec{0}$ με
$Ker(f - \lambda I_V) \Rightarrow (f - \lambda I_V)(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow f(\vec{u}) - \lambda I_V(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow$
$f(\vec{u}) - \lambda \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ & $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow$
Άρα λ ιδιοτιμή

Ορισμός: Ονομάζουμε ιδιοχώρο της γραμμικής απεικόνισης f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda \in K$ τον υπόχωρο $Ker(f - \lambda I_V)$ και τον συμβολίζουμε με
$V_f(\lambda) = V(\lambda) = Ker(f - \lambda I_V)$

Τα μη μηδενικά διανύσματα του $V_f(\lambda)$ είναι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ.

$\dim V_f(\lambda) \geq 1$

Ορισμός: Ονομάζεται ιδιοχώρο του πίνακα $A \in K^{n \times n}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda \in K$ τον υπόχωρο $\{X \in K^{n \times 1} \mid (A - \lambda I_{n \times n})X = 0\} = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_{n \times n})$

Θεώρημα: Έστω V ένας K-διαν. χώρος και $\alpha = \{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}\}$ είναι μια διατεταγμένη βάση του K. Έστω $A = [f]_\alpha^\alpha$ και $\lambda \in K$. Το λ είναι η ιδιοτιμή της f αν και μόνο αν $\det(A - \lambda I_{n \times n}) = 0$

Το λ είναι ιδιοτιμή της $f \Leftrightarrow$
$\operatorname{Ker}(f - \lambda I_V) \neq \{\vec{0}\} \Leftrightarrow$
Η απεικόνιση $f - \lambda I_V$ δεν είναι ισομορφισμός.
$\Leftrightarrow$ Η απεικόνιση $f - \lambda I_V$ δεν είναι αντιστρέψιμη.
$\Leftrightarrow$ Ο πίνακας της $[f - \lambda I_V]_\alpha^\alpha$ δεν είναι αντιστρέψιμος
$\Leftrightarrow$ Η ορίζουσα $\det([f - \lambda I_V]_\alpha^\alpha) = 0$
$\Leftrightarrow \det([f]_\alpha^\alpha + [-\lambda \cdot I_V]_\alpha^\alpha) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda [I_V]_\alpha^\alpha) = 0$
$\Leftrightarrow \det\left(A - \lambda \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{a_1} & \vec{a_2} & \vec{a_n} \end{array} \end{array}\right) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_{n \times n}) = 0$

Ορισμός: Το πολυώνυμο $\det(A - x \cdot I_{n \times n})$ ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A.
Το λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $A \in K^{n \times n}$ αν και μόνο αν $\det(A - \lambda I_{n \times n}) = 0$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Άσκηση 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο
ιδιοτιμές
ιδιοχώρους

↓ Εδώ γραμμοπράξεις και όχι στον A

$$\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 2 & 3-x & 2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 2 & 3-x & 2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \overset{r_1 \to r_1 - r_2}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & -1+x \\ 2 & 3-x & 2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3-x & 2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \overset{r_3 \to r_3 + r_1}{=}$$

$$(1-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3-x & 4 \\ 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 3-x & 4 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)\left((x-3)^2 - 4\right) = (1-x)(x-5)(x-1) = (x-1)^2(x-5)$$

$$V_A(1) = \{ X \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid (A - \lambda I)X = 0 \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3-1 & 2 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Προκύπτει το σύστημα: $x+y+z=0$ και ο επαυ-
$2x+2y+2z=0$
$x+y+z=0$

ξημένος πίνακας

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Άρα $V_A(1)=\left\{\begin{pmatrix}-\alpha-\beta\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$

$=\left\{\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$

$=\left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

Παράγουν τον χώρο άρα είναι βάση του $V_A(1)$.

$$V_A(5)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 1} \;\middle|\; (A-5I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix}2-5 & 1 & 1\\ 2 & 3-5 & 2\\ 1 & 1 & 1-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -3 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -3 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & -4 & 8 & 0\\ 0 & 4 & -8 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & -4 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to \frac{r_2}{4}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$x+y-3z=0 \qquad x=\alpha$$
$$y-2z=0 \qquad y=2\alpha$$
$$z=\alpha \qquad z=\alpha$$

Άρα:

$$V_A(5)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\2\alpha\\\alpha\end{pmatrix} \middle| \alpha\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\middle| \alpha\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ άρα Γ.Α.

Συνεπώς βάση του $V_A(5)$ είναι το $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

$$\chi_A(x)=\det(A-xI)$$
$$\chi_f(x)=\det([f]_\alpha^\alpha-xI)\overset{?}{=}\det([f]_\beta^\beta-xI)$$
$$=\det([f-xI]_\alpha^\alpha)$$

$$[f]_\beta^\beta=[I]_\alpha^\beta[f]_\alpha^\alpha[I]_\beta^\alpha$$
$$B=P^{-1}AP$$

$$\det([f]_\beta^\beta-xI)=\det(B-xI)=\det(P^{-1}AP-xI)$$

$$\det(P^{-1}AP-x\cdot P^{-1}IP)=\det(P^{-1}(A-xI)P)=$$

$$=\det P^{-1}\det(A-xI)\cdot\det P$$
$$=\det P^{-1}\cdot\det P\cdot\det(A-xI)$$
$$=\det(A-xI)$$

$$\chi_A(x) = \det(A - x I) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-x & a_{12} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-x & \alpha_{2n} \\ \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & a_{nn}-x \end{vmatrix} =$$

$$= a_n x^n + a_{n-1} x^{n} + \dots + \alpha_0$$

$\alpha_n = (-1)^n$

$\alpha_0 = \det A$

$\alpha_{n-1} \cdot x^{n-1} = (-x)^{n-1} \alpha_{nn} + (-x)^{n-1} \alpha_{11} + \dots$
$+ (-x)^{n-1} \alpha_{22}$

$\alpha_{n-1} x^{n-1} = (-x)^{n-1} (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{nn}$

$\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} tr(A)$